**ZAKRES CZĘŚCI PODSTAWY PROGRAMOWEJ  
Liceum ogólnokształcące Klasa II**

**MATEMATYKA ZAKRES PODSTAWOWY I ROZSZERZONY**



Wymagania do egzaminu z matematyki na rok szkolny 2022/2023, przygotowane na podstawie programu nauczania dla liceum/technikum MATeMAtyka, Dorota Ponczek, Agnieszka Kamińska.

Nazywam się **Barbara Szlachta-Wota**, jestem nauczycielem, absolwentką Uniwersytetu Rzeszowskiego. Ukończyłam studia magisterskie na kierunku matematyka nauczycielska, studia inżynierskie na kierunku informatyka oraz studia podyplomowe z zakresu matematyka w finansach. Uczenie daje mi wielką satysfakcję, każdy sukces moich uczniów to nagroda i radość.

Zapraszam do kontaktu pod adresem: barbarka\_s@o2.pl

1. **ZASTOSOWANIA FUNKCJI KWADRATOWEJ**
2. Równania kwadratowe – powtórzenie Uczeń:

* rozwiązuje równania kwadratowe, korzystając z poznanych metod i wzorów
* wyznacza argument, dla którego funkcja kwadratowa przyjmuje daną wartość
* przedstawia trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej i podaje jego pierwiastki

1. Nierówności kwadratowe – powtórzenie

* rozwiązuje nierówności kwadratowe
* zaznacza na osi liczbowej iloczyn i różnicę zbiorów rozwiązań dwóch nierówności kwadratowych
* stosuje nierówności kwadratowe do wyznaczania dziedziny funkcji, w której wzorze występują pierwiastki kwadratowe

1. Równania sprowadzalne do równań kwadratowych

* rozpoznaje równania, które można sprowadzić do równań kwadratowych
* rozwiązuje równania, które można sprowadzić do równań kwadratowych

1. Układy równań (1)

* rozwiązuje algebraicznie układ równań, z których jedno jest równaniem paraboli, a drugie – równaniem prostej, i podaje interpretację geometryczną rozwiązania
* podaje interpretację geometryczną rozwiązania układu równań, znajdując punkty wspólne prostej i paraboli

1. Układy równań (2)

* rozwiązuje algebraicznie układ równań, z których obydwa są równaniami parabol, i podaje interpretację geometryczną rozwiązania

1. Wzory Viѐte’a

* stosuje wzory Viète’a do wyznaczania sumy oraz iloczynu pierwiastków równania kwadratowego (o ile istnieją)
* określa znaki pierwiastków równania kwadratowego, wykorzystując wzory Viète’a

1. Równania i nierówności kwadratowe z parametrem

* przeprowadza analizę zadania z parametrem
* zapisuje konieczne założenia tak, aby zachodziły warunki podane w treści zadania
* wyznacza te wartości parametru, dla których są spełnione warunki zadania

1. Funkcja kwadratowa –zastosowania (1)

* stosuje pojęcia najmniejszej i największej wartości funkcji
* wyznacza wartość najmniejszą i największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym

1. Funkcja kwadratowa –zastosowania (2)

* przeprowadza analizę zadania tekstowego, a następnie zapisuje odpowiednie równanie, nierówność lub funkcję kwadratową opisujące daną zależność
* znajduje rozwiązanie, które spełnia ułożone przez niego warunki
* przeprowadza analizę wyniku i podaje odpowiedź

1. **Wielomiany**
2. Stopień i współczynniki wielomianu

* rozróżnia wielomian, podaje przykład wielomianu, określa jego stopień i podaje wartości jego współczynników
* zapisuje wielomian określonego stopnia o danych współczynnikach
* zapisuje wielomian w sposób uporządkowany
* oblicza wartość wielomianu dla danego argumentu
* oblicza brakujące współrzędne punktu należącego do wykresu danego wielomianu
* sprawdza, czy dany punkt należy do wykresu danego wielomianu
* wyznacza współczynniki wielomianu spełniającego dane warunki

1. Dodawanie i odejmowanie wielomianów

* wyznacza sumę, różnicę wielomianów
* określa stopień sumy i różnicy wielomianów
* szkicuje wykres wielomianu będącego sumą jednomianów stopnia pierwszego i drugiego
* odczytuje informacje z danego wykresu wielomianu
* stosuje wielomian do opisania np. pola powierzchni prostopadłościanu i określa dziedzinę tego wielomianu

1. Mnożenie wielomianów

* określa stopień iloczynu wielomianów bez wykonywania mnożenia
* wyznacza iloczyn danych wielomianów
* podaje współczynnik przy najwyższej potędze oraz wyraz wolny iloczynu wielomianów bez wykonywania mnożenia wielomianów

1. Wzory skróconego mnożenia

* stosuje wzory na sześcian sumy lub różnicy oraz wzory na sumę lub różnicę sześcianów
* stosuje wzory skróconego mnożenia do obliczania objętości

1. Rozkład wielomianu na czynniki (1)

* wyłącza wspólny czynnik przed nawias
* stosuje wzory na kwadrat sumy i różnicy oraz wzór na różnicę kwadratów do rozkładu wielomianu na czynniki
* wykorzystuje rozkład trójmianu kwadratowego na czynniki do rozkładu wielomianu na czynniki
* zapisuje wielomian w postaci iloczynu czynników możliwie najniższego stopnia

1. Rozkład wielomianu na czynniki (2)

* stosuje metodę grupowania wyrazów i wyłączania wspólnego czynnika przed nawias do rozkładu wielomianów na czynniki
* stosuje wzory na sumę i różnicę sześcianów do rozkładu wielomianu na czynniki

1. Równania wielomianowe

* rozwiązuje równania wielomianowe metodą grupowania wyrazów i wyłączania wspólnego czynnika przed nawias
* wyznacza punkty przecięcia wykresu wielomianu i prostej oraz dwóch wielomianów
* podaje przykład wielomianu, gdy dane są jego stopień i pierwiastki

1. Dzielenie wielomianów

* dzieli wielomian przez dwumian
* stosuje schemat Hornera
* zapisuje wielomian w postaci
* sprawdza poprawność wykonanego dzielenia

1. Równość wielomianów

* wyznacza wartości parametrów tak, aby wielomiany były równe, ustalając stopień wielomianów i porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej

1. Twierdzenie Bézouta

* sprawdza podzielność wielomianu przez dwumian *x – a* bez wykonywania dzielenia
* wyznacza resztę z dzielenia wielomianu przez dwumian *x – a*
* sprawdza, czy dana liczba jest pierwiastkiem wielomianu, i wyznacza pozostałe pierwiastki
* wyznacza wartość parametru tak, aby wielomian był podzielny przez dany dwumian

1. Pierwiastki całkowite i pierwiastki wymierne wielomianu

* wskazuje liczby, które mogą być pierwiastkami całkowitymi wielomianu o współczynnikach całkowitych
* wskazuje liczby, które mogą być pierwiastkami wymiernymi wielomianu o współczynnikach całkowitych
* rozwiązuje równania wielomianowe z wykorzystaniem twierdzeń o pierwiastkach całkowitych i wymiernych wielomianu

1. Pierwiastki wielokrotne

* wyznacza pierwiastki wielomianu i podaje ich krotność, gdy dany jest wielomian w postaci iloczynowej
* bada, czy wielomian ma inne pierwiastki, oraz określa ich krotność, gdy dane są stopień wielomianu i jego pierwiastki całkowite
* znając pierwiastek wielomianu i jego krotność, wyznacza pozostałe pierwiastki wielomianu
* podaje przykłady wielomianu, gdy dane są jego stopień oraz pierwiastki i ich krotność

1. Wykres wielomianu

* szkicuje wykres wielomianu, gdy dana jest jego postać iloczynowa
* dobiera wzór wielomianu do szkicu wykresu
* podaje wzór wielomianu, gdy dane są współczynnik przy najwyższej potędze oraz szkic wykresu
* szkicuje wykres danego wielomianu, po wyznaczeniu jego pierwiastków

1. Nierówności wielomianowe

* rozwiązuje nierówności wielomianowe, korzystając ze szkicu wykresu
* rozwiązuje nierówności wielomianowe, wykorzystując postać iloczynową wielomianu (dowolną metodą: szkicując wykres lub tworząc siatkę znaków)
* rozwiązuje nierówność wielomianową, gdy dany jest wzór ogólny wielomianu

1. Wielomiany – zastosowania

* opisuje wielomianem zależności dane w zadaniu i wyznacza dziedzinę tego wielomianu
* rozwiązuje zadania tekstowe, wykorzystując działania na wielomianach i równania wielomianowe

1. **FUNKCJE WYMIERNE**
2. Wykres funkcji

* szkicuje wykres funkcji , gdzie , i podaje jej własności (dziedzinę, zbiór wartości, przedziały monotoniczności) oraz wyznacza równania asymptot jej wykresu
* szkicuje wykres funkcji , gdzie w podanym zbiorze
* odczytuje z wykresu współrzędne punktów przecięcia prostej i hiperboli

1. Przesunięcie wykresu funkcji o wektor

* przesuwa wykres funkcji o dany wektor, podaje wzór i określa własności otrzymanej funkcji
* wyznacza dziedzinę i podaje równania asymptot wykresu funkcji określonej wzorem
* podaje współrzędne wektora, o jaki należy przesunąć wykres funkcji , aby otrzymać wykres funkcji ; szkicuje wykres funkcji
* dobiera wzór funkcji do jej wykresu
* wyznacza wzór funkcji spełniającej podane warunki
* wyznacza równania osi symetrii oraz współrzędne środka symetrii hiperboli opisanej danym równaniem

1. Funkcja homograficzna

* przekształca wzór ogólny funkcji homograficznej do postaci kanonicznej
* szkicuje wykres funkcji homograficznej i określa jej własności

1. Przekształcenia wykresu funkcji

* szkicuje wykres funkcji , gdzie *f* jest funkcją homograficzną, i opisuje jej własności

1. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych

* wyznacza dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego i oblicza jego wartość dla danej wartości zmiennej
* upraszcza w prostych przypadkach wyrażenia wymierne
* wyznacza dziedziny iloczynu oraz ilorazu wyrażeń wymiernych
* mnoży, dzieli wyrażenia wymierne

1. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych

* wyznacza dziedziny sumy i różnicy wyrażeń wymiernych
* dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne
* przekształca wzory, stosując działania na wyrażeniach wymiernych; wyznacza z danego wzoru wskazaną zmienną

1. Równania wymierne

* rozwiązuje równania wymierne, podaje i uwzględnia odpowiednie założenia

1. Nierówności wymierne

* odczytuje z danego wykresu zbiór rozwiązań nierówności wymiernej
* rozwiązuje nierówności wymierne i podaje odpowiednie założenia

1. Dziedzina funkcji. Funkcje wymierne

* wyznacza dziedzinę i miejsce zerowe funkcji, w której wzorze występują ułamki i pierwiastki
* wyznacza dziedzinę i miejsce zerowe funkcji wymiernej danej wzorem
* bada, czy dane funkcje są równe, i szkicuje ich wykresy

1. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (1)

* rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, stosując interpretację geometryczną
* rozwiązuje równania i nierówności, w których występuje wartość bezwzględna tego samego wyrażenia

1. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (2)

* rozwiązuje równania i nierówności typu
* rozwiązuje równania i nierówności zapisane za pomocą sumy kilku wartości bezwzględnych
* rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, stosując definicję oraz własności wartości bezwzględnej

1. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (3)

* stosuje własności wartości bezwzględnej do rozwiązywania równań i nierówności wymiernych

1. Wyrażenia wymierne – zastosowania (1)

* wykorzystuje wyrażenia wymierne do rozwiązywania zadań tekstowych

1. Wyrażenia wymierne – zastosowania (2)

* wykorzystuje wielkości odwrotnie proporcjonalne do rozwiązywania zadań tekstowych dotyczących związku między drogą, prędkością i czasem

1. **TRYGONOMETRIA**
2. Trójkąty prostokątne

* podaje twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa oraz wzory na długość przekątnej kwadratu i wysokość trójkąta równobocznego
* stosuje twierdzenie Pitagorasa do wyznaczania długości odcinków w trójkątach prostokątnych
* korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wyprowadza zależności ogólne, np. dotyczące długości przekątnej kwadratu i wysokości trójkąta równobocznego

1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

* podaje definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym
* podaje wartości funkcji trygonometrycznych kątów: 30º, 45º, 60º
* oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o danych długościach boków

1. Trygonometria – zastosowania

* odczytuje z tablic wartości funkcji trygonometrycznych danego kąta ostrego lub wartość kąta na podstawie wartości funkcji trygonometrycznej
* wykorzystuje funkcje trygonometryczne do rozwiązywania zadań praktycznych

1. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych

* rozwiązuje trójkąty prostokątne
* wykorzystuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania związków miarowych w czworokątach i prostopadłościanach

1. Związki między funkcjami trygonometrycznymi

* podaje związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta oraz między funkcjami trygonometrycznymi kątów i
* wyznacza wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych, gdy dana jest jedna z nich
* sprawdza, czy istnieje kąt ostry spełniający podane zależności
* stosuje poznane związki do upraszczania wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne

1. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego

* określa znak funkcji trygonometrycznej kąta rozwartego
* oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kąta, gdy dane są współrzędne punktu leżącego na jego końcowym ramieniu; przedstawia ten kąt na rysunku
* stosuje wzory:   
  , do obliczania wartości wyrażenia
* oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kątów rozwartych, korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych
* zaznacza w układzie współrzędnych kąt, gdy dana jest wartość jego funkcji trygonometrycznej

1. Pole trójkąta

* podaje różne wzory na pole trójkąta
* oblicza pole trójkąta, dobierając odpowiedni wzór

1. Pole czworokąta

* rozróżnia czworokąty oraz zna ich własności
* podaje wzory na pola: równoległoboku, rombu, trapezu
* oblicza pola czworokątów
* wykorzystuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania związków miarowych w czworokątach

1. **PLANIMETRIA**
2. Okrąg

* rozpoznaje kąty środkowe w okręgu
* oblicza długość okręgu i długość łuku okręgu
* określa wzajemne położenie dwóch okręgów, mając dane promienie tych okręgów oraz odległość między ich środkami
* wykorzystuje styczność okręgów do rozwiązywania zadań

1. Koło

* oblicza pole figury, stosując wzór na pole koła i pole wycinka koła

1. Wzajemne położenie okręgu i prostej

* określa wzajemne położenie okręgu i prostej, porównując odległość środka okręgu od prostej z promieniem okręgu, określa liczbę punktów wspólnych prostej i okręgu
* stosuje własności stycznej do okręgu do rozwiązywania zadań

1. Kąty w okręgu

* rozpoznaje kąty wpisane w okrąg oraz wskazuje łuki, na których są one oparte
* stosuje twierdzenie o kątach środkowym i wpisanym, opartych na tym samym łuku oraz wnioski z tego twierdzenia i twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą okręgu

1. Okrąg opisany na trójkącie

* rozwiązuje zadania dotyczące okręgu opisanego na trójkącie równobocznym lub prostokątnym
* rozwiązuje zadania dotyczące okręgu opisanego na dowolnym trójkącie w zadaniach z planimetrii
* stosuje wzór

1. Okrąg wpisany w trójkąt

* rozwiązuje zadania dotyczące okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny lub prostokątny
* rozwiązuje zadania dotyczące okręgu wpisanego w dowolny trójkąt
* stosuje wzór

1. Okrąg opisany na czworokącie

* sprawdza, czy na danym czworokącie można opisać okrąg
* stosuje twierdzenie o okręgu opisanym na czworokącie do rozwiązywania zadań

1. Okrąg wpisany w czworokąt

* sprawdza, czy w dany czworokąt można wpisać okrąg
* stosuje twierdzenie o okręgu wpisanym w czworokąt do rozwiązywania zadań

1. Wielokąty foremne

* rozpoznaje wielokąty foremne i podaje ich własności
* oblicza miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego
* wyznacza liczbę boków wielokąta foremnego, gdy dana jest suma miar jego kątów wewnętrznych
* oblicza promień okręgu opisanego na wielokącie foremnym i wpisanego w wielokąt foremny

1. Twierdzenie sinusów

* stosuje twierdzenie sinusów do rozwiązywania trójkątów
* stosuje twierdzenie sinusów do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym

1. Twierdzenie cosinusów(1)

* stosuje twierdzenie cosinusów do rozwiązywania trójkątów

1. Twierdzenie cosinusów (2)

* wskazuje najmniejszy (największy) kąt w trójkącie, gdy dane są długości boków trójkąta
* stosuje twierdzenie cosinusów do rozwiązywania zadań
* stosuje twierdzenie cosinusów do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym

**6. FUNKCJA WYKŁADNICZA I FUNKCJA LOGARYTMICZNA**

1. Potęga o wykładniku rzeczywistym

* zapisuje daną liczbę w postaci potęgi o podanej podstawie i wykładniku rzeczywistym
* upraszcza wyrażenia, stosując prawa działań na potęgach

1. Funkcja wykładnicza

* oblicza wartości funkcji wykładniczej dla podanych argumentów
* sprawdza, czy podany punkt należy do wykresu danej funkcji wykładniczej
* szkicuje wykres funkcji wykładniczej i podaje jej własności
* porównuje liczby przedstawione w postaci potęg, korzystając z monotoniczności funkcji wykładniczej
* wyznacza wzór funkcji wykładniczej na podstawie współrzędnych punktu należącego do jej wykresu oraz szkicuje ten wykres

1. Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej (1)

* szkicuje wykres funkcji wykładniczej, stosując przesunięcie o wektor albo symetrię względem osi układu współrzędnych, i podaje jej własności
* szkicuje wykres funkcji wykładniczej otrzymany w wyniku złożenia przesunięcia o wektor i symetrii względem osi układu współrzędnych i podaje wartości tej funkcji

1. Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej (2)

* szkicuje wykresy funkcji *y* = |*f*(*x*)| i *y* = *f*(|*x*|), gdy dany jest wykres funkcji wykładniczej *f*
* rozwiązuje graficznie równania i nierówności, korzystając z wykresów funkcji wykładniczych

1. Własności funkcji wykładniczej

* rozwiązuje proste równania wykładnicze, korzystając z różnowartościowości funkcji wykładniczej
* rozwiązuje proste nierówności wykładnicze, korzystając z monotoniczności funkcji wykładniczej

1. Logarytm

* oblicza logarytm danej liczby
* stosuje do obliczeń równości wynikające z definicji logarytmu
* wyznacza podstawę logarytmu lub liczbę logarytmowaną, gdy dana jest wartość logarytmu, podaje odpowiednie założenia dla podstawy logarytmu oraz liczby logarytmowanej

1. Własności logarytmów

* stosuje twierdzenia o logarytmie iloczynu, ilorazu oraz potęgi do obliczania wartości wyrażeń z logarytmami
* podaje założenia i zapisuje w prostszej postaci wyrażenia zawierające logarytmy

1. Funkcja logarytmiczna

* szkicuje wykres funkcji logarytmicznej i określa jej własności
* oblicza podstawę logarytmu we wzorze funkcji logarytmicznej, gdy dane są współrzędne punktu należącego do wykresu tej funkcji
* wyznacza zbiór wartości funkcji logarytmicznej o podanej dziedzinie
* rozwiązuje proste nierówności logarytmiczne, korzystając z wykresu funkcji logarytmicznej

1. Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej

* szkicuje wykres funkcji logarytmicznej, stosując poznane przekształcenia, i określa jej własności
* wyznacza dziedzinę funkcji logarytmicznej

1. Zmiana podstawy logarytmu

* stosuje twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu przy przekształcaniu wyrażeń z logarytmami
* stosuje twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu do obliczania wartości wyrażeń z logarytmami

1. Funkcje wykładnicze i logarytmiczne ‒ zastosowania

* wykorzystuje funkcje wykładniczą i logarytmiczną do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym, dotyczące wzrostu wykładniczego i rozpadu promieniotwórczego