**ZAKRES CZĘŚCI PODSTAWY PROGRAMOWEJ**Liceum ogólnokształcące **Klasa III**

**MATEMATYKA ZAKRES PODSTAWOWY I ROZSZERZONY**

Wymagania do egzaminu z matematyki na rok szkolny 2022/2023, przygotowane na podstawie programu nauczania dla liceum/technikum MATeMAtyka, Dorota Ponczek, Agnieszka Kamińska.

Nazywam się **Barbara Szlachta-Wota**, jestem nauczycielem, absolwentką Uniwersytetu Rzeszowskiego. Ukończyłam studia magisterskie na kierunku matematyka nauczycielska, studia inżynierskie na kierunku informatyka oraz studia podyplomowe z zakresu matematyka w finansach. Uczenie daje mi wielką satysfakcję, każdy sukces moich uczniów to nagroda i radość.

Zapraszam do kontaktu pod adresem: barbarka\_s@o2.pl

**1. Funkcje trygonometryczne**

1. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta
* zaznacza kąt w układzie współrzędnych
* oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kąta, gdy dane są współrzędne punktu leżącego na jego końcowym ramieniu
* określa znaki wartości funkcji trygonometrycznych danego kąta
* oblicza wartości funkcji trygonometrycznych szczególnych kątów, np.: 90°, 120°, 135°, 225°, korzystając z definicji dowolnego kąta $α\in \left〈0°; 360°\right〉$
* określa położenie końcowego ramienia kąta na podstawie informacji o wartościach funkcji trygonometrycznych tego kąta
* oblicza wartości, w których występują funkcje trygonometryczne kątów należących do przedziału $\left〈0°; 360°\right〉$
1. Kąt obrotu
* zaznacza w układzie współrzędnych położenie ramienia końcowego danego kąta $α$
* zapisuje miarę danego kąta w postaci $k⋅360°+α, k\in Z$
* wyznacza kąt, gdy dany jest punkt należący do jego końcowego ramienia
* bada, czy punkt należy do końcowego ramienia danego kąta
* oblicza wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta, gdy dana jest jego miara stopniowa
* wyznacza kąt w podanym przedziale, gdy dana jest wartość jednej jego funkcji trygonometrycznej
1. 3Miara łukowa kąta
* zamienia miarę stopniową na miarę łukową i odwrotnie
* zapisuje miarę łukową danego kąta w postaci $2kπ+α, k\in Z$
* oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kątów o danej mierze łukowej
1. Funkcje okresowe
* odczytuje okres podstawowy funkcji z jej wykresu
* szkicuje wykres funkcji okresowej
* stosuje okresowość funkcji do wyznaczania jej wartości
1. Wykresy funkcji sinus i cosinus
* szkicuje wykresy i określa własności funkcji sinus i cosinus w danym przedziale
* odczytuje z wykresów funkcji sinus i cosinus argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość
1. Wykresy funkcji tangens i cotangens
* szkicuje wykresy funkcji tangens i cotangens w danym przedziale
* określa własności funkcji tangens i cotangens w danym przedziale
* odczytuje z wykresów funkcji tangens i cotangens rozwiązania równania $tgx=a, ctgx=a$ w podanym przedziale
1. Przesunięcie wykresu funkcji o wektor
* szkicuje wykres funkcji $y=f\left(x-p\right)+q, $gdzie *f* jest funkcją trygonometryczną, i określa jej własności
* szkicuje wykres funkcji, stosując symetrię względem osi *OX*
* szkicuje wykres funkcji będącej złożeniem przesunięcia i symetrii względem osi *OX*
1. Przekształcenia wykresu funkcji (1)
* podaje amplitudę wykresu funkcji $y=af(x)$, gdzie *f* jest funkcją trygonometryczną
* szkicuje wykresy funkcji $y=\left|f\left(x\right)\right| $oraz $y=f\left(|x|\right)$, gdzie *f* jest funkcjątrygonometryczną, i określa ich własności
1. Tożsamości trygonometryczne
* stosuje podstawowe tożsamości trygonometryczne w prostych sytuacjach
* dowodzi tożsamości trygonometrycznych, podając odpowiednie założenia
* oblicza wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta, gdy dana jest wartość jednej z nich
1. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów
* wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych kątów z zastosowaniem wzorów na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów
* stosuje wzory na funkcje trygonometryczne podwojonego kąta
1. Wzory redukcyjne
* zapisuje dany kąt w postaci $k∙\frac{π}{2}\pm α$ lub $k∙90°\pm α$, gdzie $k\in Z$
* wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych danych kątów z zastosowaniem wzorów redukcyjnych (także z wykorzystaniem tablic wartości trygonometrycznych lub kalkulatora)
1. Równania trygonometryczne
* rozwiązuje proste równania trygonometryczne
* rozwiązuje równania trygonometryczne, wyłączając wspólny czynnik poza nawias
* rozwiązuje równania trygonometryczne, które można sprowadzić do równań wielomianowych
1. Nierówności trygonometryczne
* rozwiązuje nierówności trygonometryczne, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji trygonometrycznych
* rozwiązuje nierówności trygonometryczne, stosując odpowiednie podstawienia

**2. Geometria analityczna**

1. Odległość między punktami w układzie współrzędnych
* oblicza odległości między punktami w układzie współrzędnych
* stosuje wzór na odległość między punktami w zadaniach dotyczących wielokątów w układzie współrzędnych
1. Środek odcinka
* wyznacza współrzędne środka odcinka, gdy dane są współrzędne jego końców
* wyznacza współrzędne jednego z końców odcinka, gdy dane są współrzędne jego środka i drugiego końca
* stosuje wzór na środek odcinka w zadaniach dotyczących własności wielokątów w układzie współrzędnych
1. Odległość punktu od prostej
* oblicza odległość punktu od prostej
* oblicza odległość między prostymi równoległymi
* stosuje wzór na odległość punktu od prostej do obliczania pól wielokątów
1. Okrąg w układzie współrzędnych
* podaje równanie okręgu o danych środku i promieniu
* sprawdza, czy punkt należy do danego okręgu
* wyznacza równanie okręgu o danym środku, przechodzącego przez dany punkt
* wyznacza środek i promień okręgu, gdy dane jest jego równanie w postaci kanonicznej lub postaci ogólnej
* sprawdza, czy dane równanie jest równaniem okręgu
1. Wzajemne położenie dwóch okręgów
* określa wzajemne położenie dwóch okręgów
1. Wzajemne położenie okręgu i prostej
* podaje liczbę punktów wspólnych i określa wzajemne położenie okręgu i prostej, porównując odległość środka okręgu od prostej z promieniem okręgu
1. Układy równań drugiego stopnia
* rozwiązuje algebraicznie i graficznie układy równań, z których co najmniej jedno jest drugiego stopnia, w tym zadania z parametrem
* stosuje układy równań drugiego stopnia w zadaniach różnych typów
1. Koło w układzie współrzędnych
* sprawdza, czy dany punkt należy do danego koła
* opisuje koło w układzie współrzędnych
1. Działania na wektorach
* wykonuje działania na wektorach
* sprawdza, czy wektory są równoległe
* wyznacza wartości parametru tak, aby wektory spełniały podany warunek
* stosuje w zadaniach działania na wektorach i ich interpretację geometryczną
1. Wektory – zastosowania
* stosuje działania na wektorach do badania współliniowości punktów
* stosuje działania na wektorach do podziału odcinka
* stosuje wektory w zadaniach z geometrii analitycznej
1. Symetria osiowa
* wskazuje figury osiowosymetryczne i podaje liczbę ich osi symetrii
* znajduje współrzędne punktu położonego symetrycznie do danego punktu względem osi układu współrzędnych
* szkicuje obraz wielokąta w symetrii względem jednej z osi układu współrzędnych i podaje współrzędne jego wierzchołków
* wyznacza równanie okręgu symetrycznego do danego okręgu względem jednej z osi układu współrzędnych lub prostej o danym równaniu
* stosuje własności symetrii osiowej w zadaniach
1. Symetria środkowa
* wskazuje figury środkowosymetryczne
* znajduje współrzędne punktu położonego symetrycznie do danego punktu względem początku układu współrzędnych
* szkicuje obraz wielokąta w symetrii względem początku układu współrzędnych i podaje współrzędne jego wierzchołków
* podaje równanie okręgu symetrycznego do danego okręgu względem początku układu współrzędnych
* stosuje w zadaniach własności symetrii środkowej

**3. Ciągi**

1. Pojęcie ciągu
* wyznacza kolejne wyrazy ciągu, gdy danych jest kilka jego początkowych wyrazów
* wyznacza wyrazy ciągu opisanego słownie
* szkicuje wykres ciągu
1. Sposoby określania ciągu
* wyznacza wzór ogólny ciągu, gdy danych jest kilka jego początkowych wyrazów
* wyznacza wskazane wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym
* wyznacza wyrazy ciągu spełniające dany warunek
1. Ciągi monotoniczne (1)
* podaje przykłady ciągów monotonicznych, których wyrazy spełniają dane warunki
* uzasadnia, że dany ciąg nie jest monotoniczny, gdy dane są jego kolejne wyrazy albo wzór ogólny
* wyznacza wyraz $a\_{n+1}$ ciągu określonego wzorem ogólnym
* bada monotoniczność ciągu, korzystając z definicji
* wyznacza wartość parametru tak, aby ciąg był ciągiem monotonicznym
1. Ciągi określone rekurencyjnie
* wyznacza początkowe wyrazy ciągu określonego rekurencyjnie
1. Ciągi monotoniczne (2)
* wyznacza wzór ogólny ciągu będącego sumą, różnicą, iloczynem lub ilorazem danych ciągów
* bada monotoniczność sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów
1. Ciąg arytmetyczny
* podaje przykłady ciągów arytmetycznych
* wyznacza wskazane wyrazy ciągu arytmetycznego, gdy dane są jego pierwszy wyraz i różnica
* określa monotoniczność ciągu arytmetycznego
* wyznacza wzór ogólny ciągu arytmetycznego, mając dane dowolne dwa jego wyrazy
* stosuje związek między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego do wyznaczania wyrazów tego ciągu
* wyznacza wartości niewiadomych tak, aby wraz z podanymi wartościami tworzyły ciąg arytmetyczny
* stosuje w zadaniach własności ciągu arytmetycznego
* udowadnia, że dany ciąg jest ciągiem arytmetycznym
1. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego
* oblicza sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego
* stosuje w zadaniach tekstowych wzór na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego
* rozwiązuje równania, stosując wzór na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego
1. Ciąg geometryczny (1)
* podaje przykłady ciągów geometrycznych
* wyznacza wyrazy ciągu geometrycznego, gdy dane są jego pierwszy wyraz i iloraz
* wyznacza wzór ogólny ciągu geometrycznego, gdy dane są dowolne dwa jego wyrazy
* wyznacza wartości niewiadomych tak, aby wraz z podanymi wartościami tworzyły ciąg geometryczny
1. Ciąg geometryczny (2)
* określa monotoniczność ciągu geometrycznego
* udowadnia, że dany ciąg jest ciągiem geometrycznym
* stosuje w zadaniach związek między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego oraz średnią geometryczną
* stosuje własności ciągu geometrycznego w zadaniach różnego typu
1. Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego
* oblicza sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego
* stosuje wzór na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego w zadaniach różnego typu
1. Ciągi arytmetyczne i ciągi geometryczne – zadania
* stosuje własności ciągów arytmetycznego i geometrycznego w zadaniach różnego typu, w tym w zadaniach na dowodzenie
1. Procent składany
* oblicza wysokość kapitału przy różnych okresach kapitalizacji
* oblicza oprocentowanie lokaty
* ustala okres oszczędzania
1. Granica ciągu
* ustala na podstawie wykresu, czy dany ciąg ma granicę, a w przypadku ciągu zbieżnego podaje jego granicę
* ustala, ile wyrazów danego ciągu jest oddalonych od danej liczby o podaną wartość
* uzasadnia, że dany ciąg nie ma granicy
1. Ciągi rozbieżne
* rozpoznaje ciąg rozbieżny na podstawie wykresu i określa, czy ma on granicę niewłaściwą, czy nie ma granicy
* bada, ile wyrazów danego ciągu jest większych (mniejszych) od danej liczby
1. Obliczanie granic ciągów (1)
* oblicza granice ciągów, korzystając z twierdzenia o granicach: sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych
* stosuje wzory na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego do obliczania granic ciągów
* oblicza granice ciągów, stosując twierdzenie o trzech ciągach
1. Obliczanie granic ciągów (2)
* oblicza granice niewłaściwe ciągów, korzystając z twierdzenia o własnościach granic ciągów rozbieżnych
1. Szereg geometryczny
* sprawdza, czy dany szereg geometryczny jest zbieżny
* oblicza sumę szeregu geometrycznego zbieżnego
* zamienia ułamek okresowy na ułamek zwykły, korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego zbieżnego
* stosuje wzór na sumę szeregu geometrycznego w zadaniach dotyczących własności ciągów

**4. Rachunek różniczkowy**

1. Granica funkcji w punkcie
* uzasadnia, że funkcja nie ma granicy w punkcie, również na podstawie jej wykresu
* uzasadnia, że dana liczba jest granicą funkcji w punkcie, korzystając z definicji
1. Obliczanie granic funkcji
* oblicza granice funkcji w punkcie, korzystając z twierdzenia o granicach: sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji, które mają granice w tym punkcie
1. Granice jednostronne
* oblicza granice jednostronne funkcji w punkcie
* stosuje twierdzenie o związku między wartościami granic jednostronnych w punkcie a granicą funkcji w punkcie
1. Granice niewłaściwe
* wyznacza granice niewłaściwe jednostronne funkcji w punkcie
* wyznacza granice niewłaściwe funkcji w punkcie
* wyznacza równania asymptot pionowych wykresu funkcji
1. Granica funkcji w nieskończoności
* wyznacza granice funkcji w nieskończoności
1. Ciągłość funkcji
* sprawdza, czy funkcja jest ciągła w danym punkcie
* bada ciągłość funkcji
1. Własności funkcji ciągłych
* stosuje twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich (własność Darboux) do uzasadniania istnienia miejsca zerowego funkcji i wyznaczania jego przybliżonej wartości
* stosuje twierdzenie Weierstrassa do wyznaczania wartości najmniejszej i największej funkcji w danym przedziale domkniętym
1. Pochodna funkcji w punkcie
* oblicza pochodną funkcji w punkcie, korzystając z definicji pochodnej
* stosuje interpretację geometryczną pochodnej funkcji w punkcie do wyznaczania współczynnika kierunkowego stycznej do wykresu funkcji w punkcie
* oblicza miarę kąta, jaki styczna do wykresu funkcji w punkcie tworzy z osią *OX*
1. Funkcja pochodna
* korzysta ze wzorów do wyznaczania funkcji pochodnej oraz wartości pochodnej w punkcie
* wyznacza równanie stycznej do wykresu funkcji w danym punkcie
1. Działania na pochodnych
* stosuje twierdzenia o pochodnej: sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji do wyznaczania funkcji pochodnej oraz wartości pochodnej w punkcie
* stosuje pochodne w zadaniach dotyczących stycznej do wykresu funkcji
1. Pochodna funkcji złożonej
* wyznacza wzór funkcji złożonej oraz jej dziedzinę
* wyznacza pochodną funkcji złożonej
* stosuje pochodną funkcji złożonej w zadaniach dotyczących stycznej
1. Interpretacja fizyczna pochodnej
* stosuje pochodną do wyznaczania prędkości oraz przyspieszenia poruszających się ciał
1. Monotoniczność funkcji
* korzysta z własności pochodnej do wyznaczania przedziałów monotoniczności funkcji
* uzasadnia monotoniczność funkcji w danym zbiorze
* wyznacza wartości parametrów tak, aby funkcja była monotoniczna, stosując twierdzenie o znaku pochodnej
1. Ekstrema funkcji
* podaje ekstremum funkcji, korzystając z jej wykresu
* wyznacza ekstremum funkcji, stosując warunki konieczny i wystarczający jego istnienia
* wyznacza wartości parametrów tak, aby funkcja miała ekstremum w danym punkcie
* uzasadnia, że dana funkcja nie ma ekstremum
1. Wartość najmniejsza i wartość największa funkcji
* wyznacza wartości funkcji najmniejszą i największą w przedziale domkniętym
* wyznacza zbiór wartości funkcji, stosując twierdzenie o przyjmowaniu wartości największej i najmniejszej
1. Zagadnienia optymalizacyjne
* wykorzystuje umiejętność wyznaczania najmniejszej i największej wartości funkcji w zadaniach optymalizacyjnych
1. Szkicowanie wykresu funkcji
* podaje schemat badania własności funkcji
* bada własności funkcji i zapisuje je w tabeli

**5. Statystyka**

1. Średnia arytmetyczna
* oblicza średnią arytmetyczną zestawu danych
* oblicza średnią arytmetyczną danych przedstawionych na diagramach lub pogrupowanych w inny sposób
* wykorzystuje w zadaniach średnią arytmetyczną
1. Mediana, skala centylowa i dominanta
* wyznacza medianę i dominantę zestawu danych
* wyznacza medianę i dominantę danych przedstawionych na diagramach lub pogrupowanych w inny sposób
* wykorzystuje w zadaniach medianę i dominantę
1. Odchylenie standardowe
* oblicza wariancję i odchylenie standardowe zestawu danych m. in. przedstawionych różnymi sposobami
1. Średnia ważona
* oblicza średnią ważoną zestawu liczb z podanymi wagami
* stosuje w zadaniach średnią ważoną